1.2 Законы Ньютона и законы сохранения

Динамика рассматривает действие одних тел на другие как причину, определяющую характер движения тел. Взаимодействием тел принято называть взаимное влияние тел на движение каждого из них.

Раздел механики, изучающий законы взаимодействия тел, называется динамикой. Законы динамики были открыты великим ученым И. Ньютоном (1687 г.). Три закона динамики, сформулированные Ньютоном, лежат в основе так называемой классической механики. Законы Ньютона следует рассматривать как обобщение опытных фактов. Выводы классической механики справедливы только при движении тел с малыми скоростями, значительно меньшими скорости света с. Самой простой механической системой является изолированное тело, на которое не действуют никакие тела. Так как движение и покой относительны, в различных системах отсчета движение изолированного тела будет разным. В одной системе отсчета тело может находиться в покое или двигаться с постоянной скоростью, в другой системе это же тело может двигаться с ускорением.

Первый закон Ньютона (или закон инерции) из всего многообразия систем отсчета выделяет класс так называемых инерциальных систем. Существуют такие системы отсчета, относительно которых изолированные поступательно движущиеся тела сохраняют свою скорость неизменной по модулю и направлению. Свойство тел сохранять свою скорость при отсутствии действия на него других тел называется инерцией. Поэтому первый закон Ньютона называют законом инерции. Впервые закон инерции был сформулирован Г. Галилеем (1632 г.). Ньютон обобщил выводы Галилея и включил их в число основных законов движения. В механике Ньютона законы взаимодействия тел формулируются для класса инерциальных систем отсчета. При описании движения тел вблизи поверхности Земли системы отсчета, связанные с Землей, приближенно можно считать инерциальными. Однако, при повышении точности экспериментов, обнаруживаются отклонения от закона инерции, обусловленные вращением Земли вокруг своей оси. Примером тонкого механического эксперимента, в котором проявляется неинерциальность системы, связанной с Землей, служит поведение маятника Фуко.

Так называется массивный шар, подвешенный на достаточно длинной нити и совершающий малые колебания около положения равновесия. Если бы система, связанная с Землей, была инерциальной, плоскость качаний маятника Фуко оставалась бы неизменной относительно Земли. На самом деле плоскость качаний маятника вследствие вращения Земли поворачивается, и проекция траектории маятника на поверхность Земли имеет вид розетки.

С высокой степенью точности инерциальной является гелиоцентрическая система отсчета (или система Коперника), начало которой помещено в центр Солнца, а оси направлены на далекие звезды. Эту систему использовал Ньютон при открытии закона всемирного тяготения (1682 г.). Инерциальных систем существует бесконечное множество. Система отсчета, связанная с поездом, идущим с постоянной скоростью по прямолинейному участку пути, – тоже инерциальная система (приближенно), как и система, связанная с Землей. Все инерциальные системы отсчета образуют класс систем, которые движутся друг относительно друга равномерно и прямолинейно. Ускорения какого-либо тела в разных инерциальных системах одинаковы. Итак, причиной изменения скорости движения тела в инерциальной системе отсчета всегда является его взаимодействие с другими телами. Для количественного описания движения тела под воздействием других тел необходимо ввести две новые физические величины – инертную массу тела и силу.

Масса – это свойство тела, характеризующее его инертность. При одинаковом воздействии со стороны окружающих тел одно тело может быстро изменять свою скорость, а другое в тех же условиях – значительно медленнее. Принято говорить, что второе из этих двух тел обладает большей инертностью, или, другими словами, второе тело обладает большей массой. Если два тела взаимодействуют друг с другом, то в результате изменяется скорость обоих тел, то есть в процессе взаимодействия оба тела приобретают ускорения. Отношение ускорений двух данных тел оказывается постоянным при любых воздействиях. В физике принято, что массы взаимодействующих тел обратно пропорциональны ускорениям:

При рассмотрении кинематики использовалась неподвижная система отсчета. В природе не существует абсолютного движения, всякое движение имеет относительный характер: либо одного тела относительно другого, либо относительно выбранной системы отсчета. Возникает вопрос, все ли системы отсчета являются равноправными, а если нет, то какие являются предпочтительными. Единственное и естественное требование к системе отсчета состоит в том, что ее выбор не должен вносить усложнения в описание движения тел, т.е. законы движения в выбранной системе отсчета должны иметь наиболее простой вид. В частности, в такой системе должны оставаться неизменными свойства пространства и времени: пространство должно быть однородным и изотропным, а время однородным.

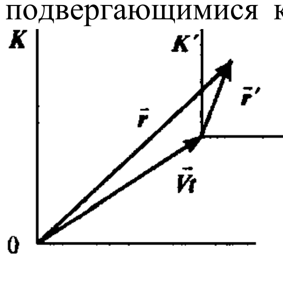
Однородность пространства и времени означает, что наблюдаемые физические свойства и явления должны быть одинаковы в любой точке пространства и в любой момент времени. Не существует выделенных в каком-либо отношении точек пространства и моментов времени.

Изотропность пространства означает, что все направления в пространстве равнозначны. Физические явления в замкнутой системе не должны изменяться при ее повороте в пространстве.

Система отсчета, которая использовалась до сих пор, отвечала этим требованиям, но возникает вопрос, как ее реализовать, т.е. с какими объектами, реально существующими в природе, можно ее связать. Оказывается, что выбор подобной системы отсчета является непростым делом, так как требуемым условиям отвечает специальный класс физических объектов. Если «привязать» неподвижную систему координат к какому-либо произвольно движущемуся объекту, например к вагону поезда, можно заметить, что в данной системе отсчета сразу произойдут странные явления, например груз, подвешенный на нити, будет время от времени отклоняться от вертикали (что связано с действием различных ускорений вагона: при торможении или ускорении и при поворотах). В результате для описания этих явлений в данной системе координат придется прибегнуть к представлениям о взаимодействиях, внешних по отношению к системе, и включить их в рассмотрение. В то же время ясно, что в другой системе координат, не испытывающей указанных ускорений, описание механических явлений будет гораздо проще.

Другой пример не очень подходящей системы отсчета — неподвижная система, связанная с Землей. В этой системе можно, напри мер, обнаружить вращение плоскости колебаний физического маятника (на самом деле связанное с вращением Земли вокруг своей оси), для объяснения которого нам также придется привлекать физические причины, являющиеся посторонними по отношению к данной системе отсчета. Вместе с тем, как показывает опыт, по отношению к Солнцу и звездам маятник будет вести себя стабильно, т.е. Солнце и звезды являются подходящими физическими объектами для выбора указанной системы отсчета.

Как показывает опыт, нужным требованиям удовлетворяют системы отсчета, которые связаны с физическими объектами, не испытывающими внешних воздействий, т.е. не подвергающимися каким-либо ускорениям. В таких системах отсчета тела находятся в



состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока на них не действуют другие тела. Свойство тела сохранять такое состояние называется инерцией, и поэтому системы отсчета, о которых "идет речь, носят название инерциальных. Если наряду с выбранной инерциальной системой, рассмотреть другую, движущуюся относительно первой прямолинейно и равномерно, то свободное движение тела в новой системе будет также происходить с постоянной скоростью. Таким образом, существует бесконечное множество инерциальных систем отсчета. Во всех этих системах свойства пространства и времени одинаковы и одинаковы законы механики. Не существует никакой абсолютной системы отсчета, которую можно было бы предпочесть другим системам. В этом состоит принцип относительности Галилея. Его можно сформулировать и так: никакими механическими опытами невозможно установить, движется ли данная инерциальная система или покоится: оба состояния эквивалентны. Координаты точки в двух системах отсчета, одна из которых K' движется равномерно и прямолинейно относительно другой (K) со скоростью V, связаны соотношением (рис.)

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V} t \quad . \qquad (1.22)$$

При этом считается, что время абсолютно, т.е. течет одинаково в обеих системах: $t' = t$. Скорость точки в системе К связана со скоростью в системе К' формулой:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} \quad . \qquad (1.23)$$

Математически принцип относительности Галилея можно сформулировать как требование инвариантности (неизменности) уравнений механики по отношению к преобразованию (1.23)

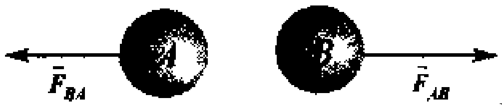
1.2.1 Законы Ньютона

Законы Ньютона образуют основу динамики — раздела механики, рассматривающего взаимодействие тел.

Первый закон Ньютона отражает свойство инерции, тел и часто называется законом инерции. Он утверждает, что всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние. Ясно, во-первых, что этот закон выполняется только в инерциальных системах отсчета. Во-вторых, отсюда следует важное заключение, что, поскольку изменение состояния покоя или равномерного движения связано с наличием в системе ускорения, последнее, в свою очередь, возникает как результат воздействия других тел. Это утверждение создает предпосылки для формулирования второго закона Ньютона.

Воздействие одного физического тела на другое характеризуется физической величиной, называемой силой. Сила, действующая на тело, сообщает ему ускорение. Величина полученного ускорения пропорциональна приложенной силе. Но разные тела под влиянием одинаковых сил приобретают разные ускорения. Данный опытный факт есть проявление уже упоминавшегося свойства инерции тела. Это свойство количественно характеризуется инертной массой тела — коэффициентом пропорциональности между приложенной к телу силой и полученным им ускорением.

Таким образом, второй закон Ньютона может быть записан в форме:



$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad , \qquad (1.24)$$

где фигурируют вновь введенные физические величины: вектор силы F и инертная масса тела m. В таком виде его можно сформулировать следующим образом: ускорение, приобретаемое телом, прямо пропорционально силе, действующей на тело, и обратно пропорционально массе тела. Третий закон Ньютона имеет дело со взаимодействующими, телами. Он утверждает, что силы, с которыми действуют друг на друга взаимодействующие тела, равны по величине и противоположны по направлению. Важно подчеркнуть, что силы, о которых идет речь, приложены к разным взаимодействующим друг с другом телам.

Сила – это количественная мера взаимодействия тел. Сила является причиной изменения скорости тела. В механике Ньютона силы могут иметь различную физическую причину: сила трения, сила тяжести, упругая сила и т. д. Сила является векторной величиной. Векторная сумма всех сил, действующих на тело, называется равнодействующей силой. Для измерения сил необходимо установить эталон силы и способ сравнения других тел с этим эталоном. В качестве эталона силы можно взять пружину, растянутую до некоторой заданной длины. Модуль силы F0, с которой эта пружина при фиксированном растяжении действует на прикрепленное к ее концу тело, называют эталоном силы. Способ сравнения других тел с эталоном состоит в следующем: если тело под действием измеряемой силы и эталонной силы остается в покое (или движется равномерно и прямолинейно), то силы равны по модулю F = F0

Эталонная сила в Международной системе единиц называется ньютон (Н). На практике нет необходимости все измеряемые силы сравнивать с эталоном силы. Для измерения сил используют пружины, откалиброванные описанным выше способом. Такие откалиброванные пружины называются динамометрами. Сила измеряется по растяжению динамометра

Второй закон Ньютона – основной закон динамики. Этот закон выполняется только в инерциальных системах отсчета. Приступая к формулировке второго закона, следует вспомнить, что в динамике вводятся две новые физические величины – масса тела m и сила а также способы их измерения. Первая из этих величин – масса m – является количественной характеристикой инертных свойств тела. Она показывает, как тело реагирует на внешнее воздействие. Вторая – сила – является количественной мерой действия одного тела на другое. Второй закон Ньютона – это фундаментальный закон природы; он является обобщением опытных фактов, которые можно разделить на две категории:

Если на тела разной массы подействовать одинаковой силой, то ускорения, приобретаемые телами, оказываются обратно пропорциональны массам

В Международной системе единиц (СИ) за единицу силы принимается сила, которая сообщает телу массой 1 кг ускорение 1 м/с2. Эта единица называется ньютоном (Н). Ее принимают в СИ за эталон силы

Третий закон Ньютона гласит, что тела действуют друг на друга с силами, равными по модулю и противоположными по направлению. Силы, возникающие при взаимодействии тел, всегда имеют одинаковую природу. Они приложены к разным телам и поэтому не могут уравновешивать друг друга. Складывать по правилам векторного сложения можно только силы, приложенные к одному телу.

Силы, действующие между частями одного и того же тела, называются внутренними. Если тело движется как целое, то его ускорение определяется только внешней силой. Внутренние силы исключаются из второго закона Ньютона, так как их векторная сумма равна нулю.

1.2.2 Законы сохранения

Запишем уравнение (1.24) в виде

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F} \quad . \qquad (1.25)$$

Выражение (2.25) представляет собой уравнение движения частицы. Если его проинтегрировать, то можно найти траекторию частицы $r = r(t, F)$. Однако часто это не является необходимым. Оказывается, уравнения Ньютона обладают тем свойством, что некоторые величины, характеризующие движение частицы, остаются неизменными во все время движения. О таких величинах принято говорить, что они сохраняются. Их также называют интегралами движения. Знание интегралов движения позволяет получить ряд важных следствий без фактического решения уравнений движения. Получим некоторые сохраняющиеся величины.

Перепишем уравнение (1.25) в виде

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F} \quad (1.26)$$

Величина $\vec{p}=m\vec{v}$ называется импульсом тела. Внеся величину *m* под знак дифференциала в (1.26), закон Ньютона можно записать в форме:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F} \quad (1.27)$$

Физический смысл импульса становится очевидным, если уравнение (1.27) проинтегрировать на конечном интервале времени от 0 до *t*:

$$\Delta\vec{p}=\int_0^t \vec{F}\,dt \quad (1.28)$$

Изменение импульса служит мерой величины силы, действующей на тело в течение конечного промежутка времени. Численно величина импульса

$$\vec{p}=m\vec{v} \quad (1.29)$$

Рассмотрим тело или систему тел в отсутствие внешних сил. Система тел, на которую не действуют внешние силы (или векторная сумма этих сил равна нулю), является замкнутой. В этом случае **F**=0; как видно из уравнений (1.26) или (1.27),

$\frac{d\vec{p}}{dt}=m\frac{dv}{dt}=0$, т.е. $\vec{p}=m\vec{v}=const$ величина , (1.30)

остается постоянной во все время движения. Полученный результат представляет собой закон сохранения импульса, который имеет место как для одного тела, так и для системы тел в отсутствие внешних сил.

В отсутствие внешних сил сохраняется еще одна скалярная величина. Если умножить уравнение (1.26) одновременно слева и справа на вектор скорости, в левой части окажется производная от полного дифференциала, и уравнение примет вид

$$m\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right)=\vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt} \quad (1.31)$$

Пусть *F* = 0. Тогда постоянной во время движения является величина

$$T=\frac{mv^2}{2} \quad (1.32)$$

Она называется кинетической энергией частицы. При отсутствии внешних сил, т. е. в замкнутой системе, сохраняется кинетическая энергия как в случае одного тела, так и для системы тел. Когда на частицу действует внешняя сила *F*, кинетическая энергия не остается постоянной. В этом случае согласно (1.31) приращение кинетической энергии за время *dt* равно скалярному произведению $\vec{F}d\vec{r}$. Величина *dA* = $\vec{F}d\vec{r}$ — это работа, совершаемая силой *F* на пути *dr* .

Проинтегрируем соотношение (1. 31) вдоль некоторой траектории от точки 1 до точки 2:

$$\int_1^2 d\left(\frac{mv^2}{2}\right)=\int_1^2 \vec{F}\,d\vec{r}.$$

Левая часть представляет собой приращение кинетической энергии на пути между точками 1 и 2, а величина

$$A=\int_1^2 \vec{F}\,d\vec{r} \qquad (1.33)$$

есть работа силы на пути 1—2.

Таким образом, работа сил, действующих на частицу, расходуется на изменение ее кинетической энергии:

$$A=T_2-T_1=\frac{mv_2^2}{2}-\frac{mv_1^2}{2}. \qquad (1.34)$$

Соответственно, изменение кинетической энергии частицы служит мерой работы, произведенной над частицей.

Если частица в каждой точке пространства подвержена действию других тел, то говорят, что эта частица находится в поле сил. В случае силового поля действие силы распределено по всему пространству. Рассмотрим такое поле сил, действие которого на частицу зависит только от положения частицы в пространстве. Такое поле можно описать с помощью некоторой скалярной функции $\varphi(r)$, зависящей, а соответствии со сказанным, только от координат. Это случай специального, но часто встречаемого в природе потенциального поля, а функция $\varphi(r)$, характеризующая поле, является потенциалом поля. Сила связана с потенциалом в каждой точке соотношением

$$\vec{F}=-const\,\frac{d\phi}{d\vec{r}}, \qquad (1.35)$$

где постоянная определяется свойствами частицы, взаимодействующей с полем сил.

Подставим соотношение (1.35) в (1.33) и опять проинтегрируем вдоль траектории от точки 1 до точки 2. Получим

$$T_2 - T_1 + const(\varphi_2 - \varphi_1) = O,$$

т.е. величина $T_2 + const\cdot\varphi_2 = T_1 + const\cdot\varphi_1$

остается постоянной при движении вдоль траектории. Таким образом, для частицы в потенциальном поле внешней силы сохраняется, т. е. является интегралом движения, величина

$$E = T + const\cdot\varphi(r). \qquad (1.36)$$

Величина $U = const\cdot\varphi(r)$ называется потенциальной энергией частицы в поле $\varphi(r)$, а выражение (1.36) представляет собой полную механическую энергию частицы

$$E = T + U. \qquad (1.37)$$

1.2.3 Равновесие механической системы

Из выражения (1.37) следует, что при постоянной величине полной энергии кинетическая энергия частицы может возрастать только за счет уменьшения потенциальной энергии. Поэтому, если потенциальная энергия имеет минимальное значение, кинетическая энергия не может измениться без внешнего воздействия. Таким образом, условием механического равновесия системы является минимум ее потенциальной энергии

$$\frac{dU}{d\vec{r}}=0, \qquad (1.38)$$

что эквивалентно равенству нулю сил, действующих на частицу.

1.3 Движение в гравитационном поле.

В 1687 г. Ньютон на основании уже обнаруженных к тому времени на опыте законов движения планет установил, что всякие два тела притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной квадрату расстояния между ними. Например, материальная точка с массой m, находящаяся на расстоянии r от другой материальной точки с массой M, будет притягиваться последней с силой

$$F=\gamma \frac{Mm}{r^2}, \qquad (1.39)$$

где γ— размерная постоянная, необходимая для того, чтобы величина F имела размерность силы. В случае наличия тел сложной формы, когда их нельзя рассматривать как материальные точки, формула (1.39) видоизменяется, но основной характер взаимодействия сохраняется. Постоянная в уравнении (1.39) была впервые определена в 1798г. английским физиком Кавендишем в поразительном по точности опыте. Ее численное значение очень мало $\gamma = 6.6 \cdot 10^{-11}$ н·м^2/кг^2 — это значит, что с силой столь малой величины притягиваются друг к другу две массы в 1кг каждая на расстоянии в 1м. Огромное значение, которое имеют силы гравитации в природе, обусловлено с одной стороны, большими массами небесных тел, а с другой — отсутствием сил иного происхождения.

Соотношение (1.39) носит название закона всемирного тяготения. Оно хорошо описывает движение тяготеющих масс.

С физической точки зрения соотношение (1.39) описывает взаимодействие массы m с полем тяготения, или, как принято говорить, с гравитационным полем, создаваемым в пространстве массой M. Хотя способ передачи гравитационного взаимодействия нам неизвестен, опыт показывает, что с каждой массой в пространстве связано гравитационное поле.

Гравитационное поле, создаваемое в пространстве массой М, будем характеризовать потенциалом

$$\phi=-\gamma \frac{M}{r}. \qquad (1.40)$$

Потенциальная энергия, приобретенная телом с массой в этом поле, согласно результатам предыдущего раздела, может быть записана в виде

$$U=-\gamma \frac{mM}{r}, \qquad (1.41)$$

т. е. потенциальная энергия поля в гравитационном поле равна потенциалу поля в точке нахождения тела, умноженному на массу тела.

Сила притяжения (1.39) может быть найдена по формуле (1.35):

$$\vec{F}=-\frac{dU}{d\vec{r}}=\gamma \cdot m \cdot M \frac{d}{d\vec{r}}\left(\frac{1}{r}\right)=-\gamma \cdot m \cdot M \frac{\vec{r}}{r^3}=-\gamma \frac{mM}{r^2}\vec{e}_{\vec{r}} \qquad (1.42)$$

($\vec{e}_{\vec{r}}=\frac{\vec{r}}{r}$ — единичный вектор в направлении радиус-вектора r).

Зная потенциал поля, можно вычислить работу, совершаемую силами поля над телом с массой т при перемещении его из положения 1 в положение 2. Эта работа может быть выражена через разность значений потенциала поля в указанных точках

$$A=\int_1^2 \vec{F}\,d\vec{r}=-\int_1^2 \frac{dU}{d\vec{r}}\,d\vec{r}=U(1)-U(2)=m(\phi_1-\phi_2) \qquad (1.43)$$

Отсюда видно, что работа в поле сил тяготения не зависит от пути, т. е. от того, каким образом тело было перемещено из положения 1 в 2.

Массы, фигурирующие в законе всемирного тяготения, характеризуют способность тел создавать поле тяготения и в свою очередь испытывать на себе их действие. Поэтому масса, о которой идет здесь речь, может быть названа тяготеющей, или гравитационной, массой, в отличие от инертной массы, фигурирующей во втором законе Ньютона. Хотя их физический смысл различен и ниоткуда не следует их равенство, тем не менее они все же тождественны. Невозможность различить обе массы является следствием большого числа самых совершенных опытов. Таким образом, во втором законе Ньютона и в законе тяготения проявляются различные свойства одной и той же величины — физической массы.

1.3.1 Движение в поле тяготения Земли.

Из закона всемирного тяготения следует, что у поверхности Земли все тела должны падать с одинаковым ускорением. В самом деле, по второму закону Ньютона ускорение, приобретаемое телом с массой m у поверхности Земли $a = F/m$, где F — сила, с которой тело притягивается земным шаром. По закону тяготения

$$F=\gamma \frac{m \cdot M_3}{R_3^2}, \qquad (1.44)$$

M_3 — масса Земли и R_3 — радиус земного шара. Отсюда $a=\gamma \frac{M_3}{R_3^2}$ и не зависит от массы падающего тела. Таким образом, все тела у поверхности Земли независимо от их массы падают с одинаковым ускорением

$$g=\gamma \frac{M_3}{R_3^2}, \qquad (1.45)$$

которое называется ускорением свободного падения. Подставляя сюда известные значения констант, получим значение 9,8 м/c^2. В действительности значения g слегка различаются при учете сил сопротивления и реальной формы Земли. По второму закону Ньютона это означает, что в поле тяжести Земли все тела испытывают силу тяжести, равную mg. При перемещении массы с одной высоты на другую эта сила тяжести совершает работу, которую можно вычислить как изменение потенциальной энергии тела.

1.3.2 Космические скорости.

Определим скорость, которую необходимо иметь телу дли того, чтобы оно могло стать спутником Земли, т. е. первую космическую скорость. Величину этой скорости можно определить из условия равенства сил, действующих на тело при его вращении вокруг Земли. Сила притяжения должна быть уравновешена центробежной силой mv^2/R. Таким образом,

$$\frac{mv^2}{R_3}=g \frac{M_3}{R_3^2} \qquad (1.46)$$

откуда находим значение первой космической скорости

$$v_1=\sqrt{g \frac{M_3}{R_3}}=\sqrt{g \cdot R_3}$$

Подставляя численные значения величин, получаем v_1 = 8 км/с.

Вторая космическая скорость — это скорость, которую нужно сообщить телу для того, чтобы оно покинуло область земного притяжения. Для определения второй космической скорости следует вычислить работу, которую необходимо совершить против сил земного притяжения для удаления тела с поверхности Земли на бесконечность. Эта работа равна разности потенциальных энергий тела в начальном и в конечном положениях:

$$A = U_к - U_н.$$

Потенциальная энергия тела в гравитационном поде Земли на ее поверхности согласно (1.41) имеет вид:

$$U_n=-\gamma \frac{mM_3}{R_3}$$

$$U_n = -\gamma \frac{mM_3}{R_3}$$ а на бесконечности равна нулю. Таким образом,

$$A = -\gamma \frac{mM_3}{R_3} = mgR_3 \qquad (1.47)$$

Величина этой потенциальной энергии определяет кинетическую энергию, которую должно иметь тело для того, чтобы быть в состоянии совершить указанную работу

$$\frac{mv_{11}^2}{2} = mgR_3$$

Отсюда вторая космическая скорость определяется выражением:

$$v_{11} = \sqrt{2gR_3} = \sqrt{2} \cdot v_1 .$$

Ее численное значение приблизительно 11 км/с. Пусть перемещение происходит вдоль оси Z. При этом сила тяжести совершает работу

$$A = \int_1^2 F dz = mg(z_2 - z_1) .$$

Согласно определению потенциальной энергии А = U_1-U_2. Отсюда следует, что потенциальная энергия тела в поле силы тяжести Земли может быть записана в виде

$$U(z) = mgz + const, \qquad (1.48)$$

где постоянная связана с выбором начала отсчета энергии. Эту формулу можно получить и непосредственно из закона всемирного тяготения. Запишем его в виде

$$U = -\gamma \frac{mM}{R_3 + z} = -\gamma \frac{mM}{R_3\left(1 + \frac{z}{R_3}\right)} ,$$

где z— высота тела с массой m над поверхностью Земли. При малых

$\frac{z}{R_3} << 1$, $\left(1 + \frac{z}{R_3}\right)^{-1} \simeq 1 - \frac{z}{R_3}$, откуда находим $U = U_0 + mgz = U(R_3) + mgz$